Cap 7 - Lavoro ed energia

Abbiamo visto come applicare le leggi della dinamica in varie situazioni. Spesso però l'analisi del moto spesso risulta complicata. Esiste un approccio alternivo all'analisi del moto che si realizza introducendo i concetti di **lavoro ed energia**.

7.3 - Lavoro di una forza costante

Il lavoro svolto da una forza F è definito dal seguente prodotto scalare:
$\mathrm{L} = (\mathrm{W}) = \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{s}} = \mathrm{Fscos}\theta = (\mathrm{Fcos}\theta)\mathrm{s} = \mathrm{F_s s}$
ovvero il lavoro è pari al prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento, moltiplicato per lo spostamento stesso. Dalla definizione se una forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro risulta **nullo**.

Tale definizione comporta che il lavoro ha un segno:
se l'angolo θ tra la forza e lo spostamento è $\theta \leq 90°$ il lavoro è positivo altrimenti sarà negativo; in quest'ultimo caso la componente della forza nella direzione dello spostamento è di conseguenza opposto allo spostamento stesso.
Unità di misura: per il lavoro si usa il **Joule** e 1 Joule = 1 Newton $\cdot$ 1m ed è la stessa unità di misura dell'energia.

7.6 Lavoro compiuto da forze variabili

Estendiamo la definizione usando gli integrali:
$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$ è il lavoro compiuto in uno spostamento sull'asse x.
In generale per una forza ed uno spostamento con qualunque direzione si ottiene che se la forza è $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ per calcolare il lavoro dobbiamo prima considerare lo spostamento infinitesimo $\vec{\mathrm{ds}} = \mathrm{dx}\ \hat{\mathrm{i}} + \mathrm{dy}\ \hat{\mathrm{j}} + \mathrm{dz}\ \hat{\mathrm{k}}$ di conseguenza il lavoro infinitesimo è

$dL = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Possiamo ricondurre il caso generico ad una somma di 3 integrali:
$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{r_i}}^{\mathrm{r_f}} \mathrm{dL} = \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_f}} \mathrm{F_x dx} + \int_{\mathrm{y_i}}^{\mathrm{y_f}} \mathrm{F_y dy} + \int_{\mathrm{z_i}}^{\mathrm{z_f}} \mathrm{F_z dz}$
($\vec{\mathrm{r_i}} = \mathrm{x_i}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{y_i}\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{z_i}\hat{\mathrm{k}}$ e $\vec{\mathrm{r_f}} = \mathrm{x_f}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{y_f}\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{z_f}\hat{\mathrm{k}}$ sono i vettori posizione iniziale e finale)
Vediamo alcune applicazioni:

(7.5) Lavoro svolto da una molla

Le molle seguono la legge di Hooke F=-kx che descrive ad esempio il caso di una molla che si può muovere lungo l'asse x. Il lavoro necessario a spostare una molla dalla sua posizione di riposo (**che assumiamo essere x=0**) è
$L = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -\frac{1}{2} k x^2 |_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$

7.3 - Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

Definiamo come **Energia Cinetica** la forma di energia connessa allo stato di moto di un corpo e si definisce come $K = (E_k) = \frac{1}{2}mv^2$ e si misura anch'essa in Joule.

Il teorema stabilisce che $L = \Delta K = K_f - K_i$ ovvero che il lavoro compiuto da una forza comporta una variazione di energia cinetica. Questa espressione permette di definire anche l'energia (in generale) come la capacità di un corpo a compiere un lavoro.

Dimostrazione: 1°caso Forza costante

consideriamo F \\ s allora il lavoro è L=Fs dalla 2^a Legge della dinamica si ha F=ma $\Rightarrow L = m \cdot a \cdot s$

$$\begin{cases} s = v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f = v_i + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \dots \\ t = \frac{v_f - v_i}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s = v_i \cdot \frac{v_f - v_i}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(v_f - v_i)^2}{a^{\cancel{2}}} \\ t = \dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_i v_f - v_i^2}{a} + \frac{v_f^2 + v_i^2 - 2v_i v_f}{2a}$$

$s = \frac{2v_i v_f - 2v_i^2 + v_f^2 + v_i^2 - 2v_i v_f}{2a} \Rightarrow \mathbf{s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}}$ Quindi in questo caso si ottiene: $L = m \cdot a \cdot s = ma\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{2a} = \frac{1}{2}(mv_f^2 - mv_i^2) = E_{kf} - E_{ki} = \Delta E_k$ Pertanto abbiamo dimostrato nel primo caso il teorema, che stabilisce che l'energia cinetica aumenta se il lavoro è positivo o diminuisce se il lavoro è negativo.

In altre parole possiamo anche dire che l'energia cinetica è pari al lavoro necessario a fermare un corpo di massa m in moto con velocità v.

7.6-teor. lavoro-en.cinetica per forze variabili

Il secondo caso della dimostrazione è quello più generico nel quale la forza è variabile. La definizione generale del lavoro è: $L = \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_f}} \mathrm{F(x)dx}$ e $F = ma \Rightarrow$
$L = \int_{\mathrm{x_i}}^{\mathrm{x_f}} \mathrm{madx}$
esplicitiamo la funzione integranda: $madx = m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = mv\frac{dv}{dx}dx = mvdv$ avendo usato le regole di derivazione delle funzioni composte. Quindi si ottiene
$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = \frac{1}{2}mv^2|_{v_i}^{v_f}$
$\mathbf{L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta E_k = \Delta K}$

7.6 Lavoro svolto da una generica forza in 3d

Concludiamo questa parte di teoria verificando la validità del teorema anche nel caso di forza qualunque con direzione generica: il lavoro infinitesimo scritto in termini delle componenti: $dL = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ per cui il lavoro totale è
$L = \int_{\vec{r_i}}^{\vec{r_f}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$
e per ognuna delle componenti valgono i teoremi dimostrati prima.

7.7 Potenza

Definiamo come **Potenza** la rapidità con la quale viene sviluppato un lavoro nel tempo ovvero in termini matematici:

$\bar{\mathrm{P}} = <\mathrm{P}> = \frac{\Delta \mathrm{L}}{\Delta \mathrm{t}}$ **(Potenza media)**

$P = \frac{dL}{dt}$ **(Potenza istantanea)**

La potenza si misura in Watt (W): 1W=1J/1s

Dalla stessa definizione è possibile dare una unità di misura alternativa per l'energia: $L = <P> \Delta t \Rightarrow$ **Watt x secondi = Joule (energia)** ad esempio:

1 wattora (1 watt $\cdot$ 1 hr) = 1 W $\cdot$ 3600 s= **3600 J** e analogamente per i multipli.

Legame Potenza-Forza

$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{ds}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ (**per F costante**)

Esercizio

Una cassa di M=15 Kg è trascinata in salita su una piano rampa liscia a velocità costante, per una distanza d= 5.7 m e fino ad una altezza h=2.5 m rispetto al punto di partenza, ed infine si arresta. Calcolare:

1. **il lavoro svolto dalla forza peso;**
2. **il lavoro della tensione T della fune usata.**

Soluzione: la forza peso è costante quindi il lavoro è dato da $L = \vec{P} \cdot \vec{d} = mgcos(90° + \theta)d = -mgsin\theta d$ e θ è l'inclinazione della rampa rispetto all'orizzonte data anche da $sin\theta = \frac{h}{d}$ quindi $L = -mgd\frac{h}{d} = -15Kg9.8m/s^2 \cdot 2.5m = \mathbf{-368J}$

2) La tensione della fune T non è nota quindi non possiamo sapere se è una forza costante a meno che non risolviamo la dinamica del sistema (quindi fare il bilancio delle forze ecc.) Tuttavia possiamo usare il teorema del lavoro e dell'ener-

gia nella forma generica e applicata a tutte le forze agenti:

$L = \Delta E_k = 0$ perchè il corpo parte da fermo e si ferma alla fine.

$L = \int(\vec{P} + \vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{ds} = L_P + L_N + L_T$

Il primo termine è già noto, N è la reazione normale del piano che essendo **normale** è perpendicolare allo spostamento che è parallelo al piano. Quindi $L_N = 0$ ed in definitiva $\mathbf{L_P + L_T = 0} \Rightarrow \mathbf{L_T = -L_P = +368J}$

Problema 7.8

Un blocco di massa M=0.4 Kg scivola, con velocità costante v=0.5 m/s, su un piano orizzontale privo di attrito. Il blocco si arresta comprimendo una molla collocata sul suo percorso. Se la costante elastica è k=750 N/m di quanto viene compressa la molla?

Il lavoro per comprimere una molla è
$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$
e nel nostro caso $x_i = 0$ è la posizione a riposo della molla e x_f è la posizione finale ignota. Applichiamo il teorema $L = \Delta K = -\frac{1}{2}kx_f^2$ e per l'en. cinetica $\Delta E_k = \frac{1}{2}(Mv_f^2 - Mv_i^2)$. La velocità finale $v_f = 0$ quindi $-\frac{1}{2}kx_f^2 = -\frac{1}{2}Mv_i^2$ da cui $x_f^2 = \frac{Mv_i^2}{k} \Rightarrow x_f = \sqrt{\frac{M}{k}}v_i = 1.2cm.$

Problema 7.17

Un elicottero recupera un uomo di massa M=72Kg, sollevandolo di 15 m, con una accelerazione pari a 0.1g. Calcolare il lavoro fatto sull'uomo:

a) dall'elicottero;

b) dalla forza peso;

c) la velocità e l'energia cinetica dell'uomo un attimo prima di entrare nell'elicottero.

Esercizio

Un blocco di massa M è tirato da fermo da una forza F. Considerando che M=6Kg e F=12N, calcolare la velocità del blocco dopo aver percorso un tratto di s=3m, sia nel caso del piano liscio che il caso del piano scabro, con $\mu_d = 0.15$.

Nel caso il piano sia liscio e senza attrito possiamo utilizzare il teor. lavoro-en.cinetica dal momento che si vuole sapere solo la velocità finale (cambiava totalmente la risoluzione se si voleva conoscere il tempo impiegato):

il lavoro complessivo è $L = (\vec{F} + \vec{N} + \vec{P}) \cdot \vec{s}$ ma $\vec{N}$ e $\vec{P}$ sono $\perp$ a $\vec{s}$ quindi risulterà $L = Fs = \Delta E_k$ e poichè $v_i = 0$ allora si ha $Fs = \frac{1}{2} M v_f^2$ da cui ricaviamo $v_f^2 = \frac{2Fs}{M} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 3}{6} m^2/s^2$ per cui $v_f = \sqrt{12} m/s = 3.5 m/s$

Nel secondo caso agisce anche la forza di attrito che risulta essere costante e pari a $F_a = \mu_d N = \mu_d M g$ ed il lavoro totale è $L = (F - F_a)s = Fs - \mu_d N s = Fs - \mu_d M g s$ con il segno meno che nasce dal fatto che la forza di attrito ha verso opposto allo spostamento.
In realtà **tutte le forze di attrito** producono **lavori negativi** in quanto oppongono resistenza al moto e tendono a **ridurre** **l'energia cinetica**.
Facciamo i conti: $F_a = 0.15 \cdot 6 \cdot 9.8N = 8.82N$ quindi $L = (F - F_a)s = (12 - 8.82) \cdot 3J = \Delta E_k \Rightarrow v_f^2 = \frac{2(F-F_a)s}{M} = 3.18m^2/s^2 \Rightarrow v_f = 1.8m/s$