

## Cap 30 - Campi magnetici generati da correnti

Le correnti generano i campi magnetici. Per calcolare il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente dobbiamo usare una procedura simile a quella della legge di Coulomb e sapere qual'è la forza elementare in un punto nello spazio dovuta ad un elemento di filo percorso da corrente. Possiamo considerare un filo qualunque percorso da corrente  $i$  ed individuare un elemento  $ds$  (tangente al filo ed orientato secondo la corrente). Possiamo trovare che il contributo di campo magnetico generato da questo elemento è  $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\mathbf{s} \sin \theta}{r^2}$  con  $\theta$  l'angolo tra  $d\mathbf{s}$  ed il vettore  $\vec{r}$  che individua il punto nello spazio nel quale calcoliamo  $dB$ . La quantità  $\mu_0$  è detta **permeabilità magnetica del vuoto** ed ha valore  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} T \cdot m/A$ . La direzione esatta di  $dB$  si ricava dal prodotto vettoriale di  $\vec{ds} \wedge \vec{u}_r$  per cui la precedente espressione la

possiamo scrivere come

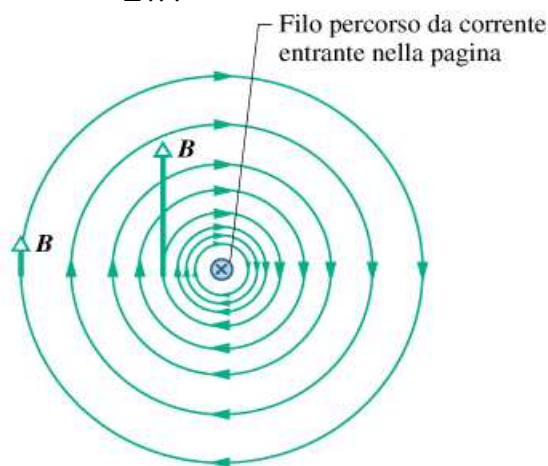
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \, d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

nota come **Legge di Biot-Savart** legge che di fatto ha un andamento come  $1/r^2$  come la legge di Coulomb.

## Campo magnetico del filo rettilineo indefinito

L'espressione che dimostreremo fornisce come modulo del campo magnetico, nel caso il filo sia rettilineo e indefinito un valore che è

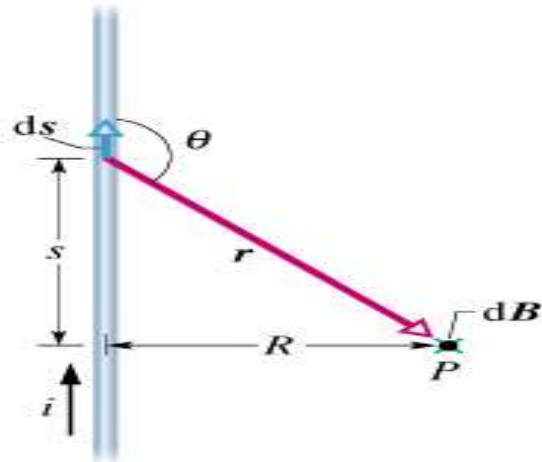
$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$  inoltre le linee del campo magnetico si



avvolgono attorno al filo con tante linee concentriche al filo e percorrenza secondo la regola della mano destra: **Afferriamo idealmente il filo con il pollice puntato**

secondo la direzione della corrente nel filo. Il verso di rotazione stabilito dalle altre dita indica il verso delle linee del campo magnetico generato dal filo. Questo vale anche per i singoli elementi infinitesimi.

Dimostrazione della formula:



Consideriamo un generico elemento  $ds$  del filo (vedi figura) facendo il prodotto vettoriale di  $\vec{ds} \wedge \vec{r} = r ds \sin \theta$  per cui  $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{i} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$  e la direzione di  $d\mathbf{B}$  è perpendicolare al piano della figura e per ogni tratto  $ds$   $\vec{dB}$  ha la stessa direzione e verso per cui possiamo direttamente integrare per ottenere il risultato. Osserviamo prima che la metà inferiore del filo e quella superiore a partire dal punto P danno contributi tra loro uguali se il filo è infinito.

Pertanto possiamo dire che

$$B = 2 \int_0^{\infty} dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \theta ds}{r^2}$$

ma le variabili  $ds$ ,  $r$  e  $\sin \theta$  sono tra loro collegate infatti  $r = \sqrt{s^2 + R^2}$  e  $\sin \theta = \sin(180 - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$  per cui l'equazione diventa

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{R}{(s^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} ds =$$

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[ \frac{s}{(s^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Quindi questo è il campo generato da un filo rettilineo infinito (e come detto nella dimostrazione) ogni metà del filo genera metà della precedente espressione.

## Campo del filo piegato ad arco

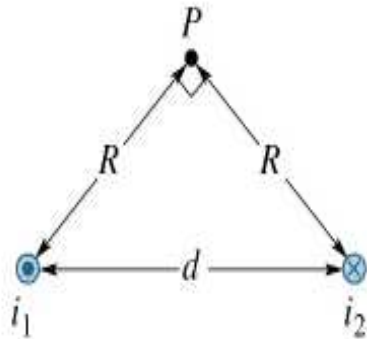
Se il filo è piegato ad arco e consideriamo il campo risultante nel centro di questo arco abbiamo che dalla figura l'angolo tra  $ds$  e  $r$  è  $90^\circ$  per cui abbiamo che  $dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{R^2}$  tale valore è lo stesso sia come modulo che come di-

reazione e verso per tutti gli elementi infinitesimi per cui abbiamo che nel centro di curvatura del filo si ha

$$B = \int dB = \int_0^\phi \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds}{R^2} =$$
$$\int_0^\phi \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\phi}{R}$$

Nel caso l'arco sia in realtà una spira circolare allora il campo magnetico risultante **al centro** della spira ha direzione perpendicolare al piano della spira e modulo pari a  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{4\pi} \frac{2\pi}{\mathbf{R}} = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{2\mathbf{R}}$

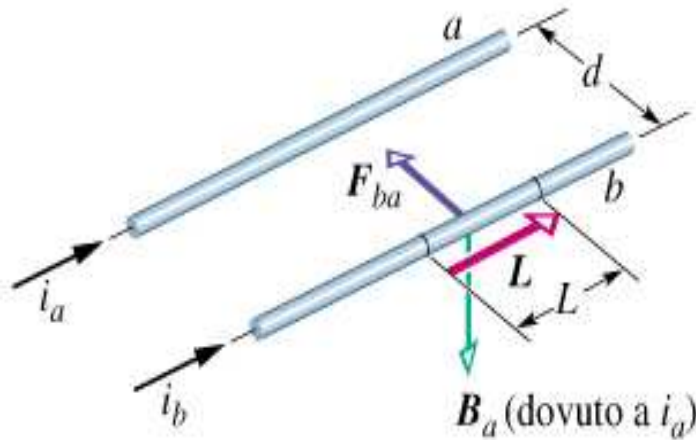
## Esempio svolto 30.2



$$i_1 = 15 \text{ A} \quad i_2 = 32 \text{ A}$$

$$d = 53 \text{ cm}$$

## 30.2 - Forza tra due conduttori paralleli



Poichè un filo percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico risente di una forza di Lorentz, allora anche due fili paralleli percorsi da corrente interagiscono tra loro, in quanto ognuno di essi genera un campo magnetico e tramite questo producono una forza di Lorentz sull'altro filo. Consideriamo il caso in cui i due fili sono paralleli ed infiniti, allora calcoliamo il campo magnetico del filo 1 **nella posizione del filo 2** che è distante  $d$  dall'altro. Il campo sarà  $B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$ . La forza di Lorentz prodotto da questo campo è allora  $F_{21} = i_2 \vec{L} \wedge \vec{B}_1 = i_2 L \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$  Possiamo anche vedere l'effetto che il secondo filo produce sul primo

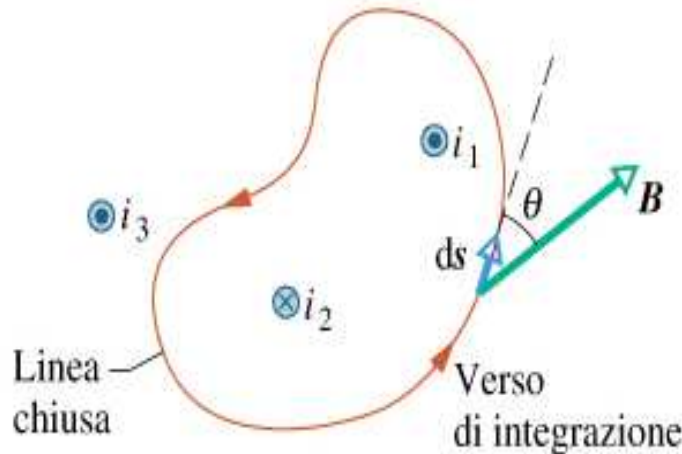
e troveremo che la forza in modulo è la stessa (il verso è opposto). Per quanto riguarda la direzione ed il verso dal prodotto vettoriale tra  $L$  e  $B$  ci rendiamo conto che

**se le correnti sono concordi e parallele la forza è attrattiva mentre se le correnti sono discordi e parallele la forza è repulsiva.**

L'espressione della forza trovata prima inoltre permette di definire l'ampere come quella corrente che produce una forza di  $2 \cdot 10^{-7} N$  sui due fili paralleli **per ogni metro di lunghezza**

## Legge di Ampere

La legge di Ampere stabilisce che  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$  ovvero che la circuitazione di  $B$  lungo un percorso chiuso è pari alla somma delle correnti **concatenate** al percorso stesso. Per esaminare il significato di questa legge partiamo dalla

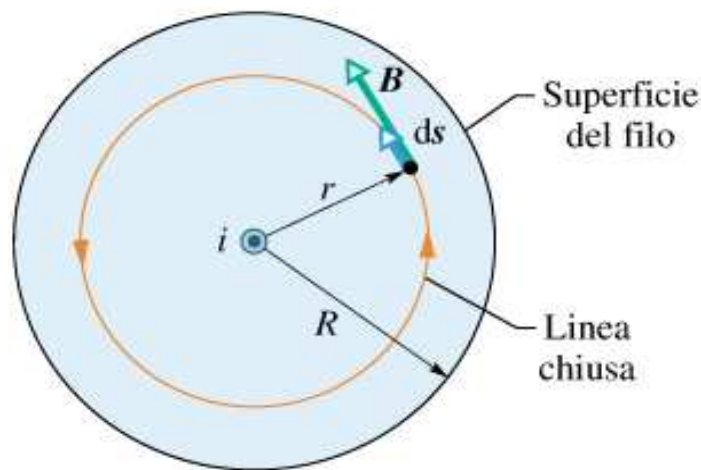


situazione nella figura e seguiamo un arbitrario percorso chiuso e dobbiamo calcolare  $\vec{B} \cdot \vec{ds}$  per poi integrarlo. In realtà non sappiamo il valore di  $B$  ma sappiamo comunque che è nel piano della figura quindi  $\vec{B} \cdot \vec{ds} = B ds \cos \theta$  Nel fare l'integrale attribuiamo un verso di  $B$  concorde a quello di integrazione (da noi stabilito), effettuiamo l'integrale, e poi diamo un segno alle correnti (secondo membro) in modo da considerare positive le correnti che sono **concordi** (secondo l'avvitamento della mano destra) alla direzione nel percorso di integrazione e negative se discordi.

## Applicazione del teor. Ampere: campo del filo infinito

Nel caso trattiamo un solo filo ed infinito, consideriamo un percorso circolare (essendo arbitrario il percorso scegliamo il più comodo) avente centro nel filo e raggio  $r$ . In questo caso si ha  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta ds = B \oint ds = B(2\pi r)$  per il teorema  $B(2\pi r) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$  che ovviamente verifica quanto già trovato in precedenza

### Campo del filo infinito all'interno del filo stesso



La legge di Ampere permette di calcolare agevolmente anche il campo magnetico all'interno del filo percorso da corrente. Infatti applicando il teorema ad un percorso circolare concentrico al filo e di raggio

$r < R$  interno al filo il primo membro del teorema è ancora  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r)$  ma il termine al secondo membro è invece  $\mu_0 i_{conc}$  e quindi dobbiamo calcolare la corrente concatenata. La corrente concatenata è quella che attraversa il percorso circolare e chiaramente è una porzione della totale. Dalla definizione di densità di corrente, dal momento che la corrente si distribuisce uniformemente sulla sezione del conduttore, abbiamo che  $i_{conc} = jS = j\pi r^2$  e  $j = \frac{i}{\pi R^2}$  da cui  $B2\pi r = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2$  semplificando si ha quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{i}}{2\pi R^2} \mathbf{r}$$

### Problema svolto 30.3

In un cilindro cavo di raggi interni  $a=2$  cm ed esterno  $b=4$  cm scorre una corrente uscente rispetto il piano della figura con densità di corrente **non uniforme** secondo la legge  $j = cr^2$  con  $c=3.0 \cdot 10^6$  A/m<sup>4</sup> ed  $r$  in metri. Quanto vale  $B$  in un punto distante 3 cm dal centro?

Il punto è interno al filo quindi  $B = \frac{\mu_0 i_{conc}}{2\pi r}$  la

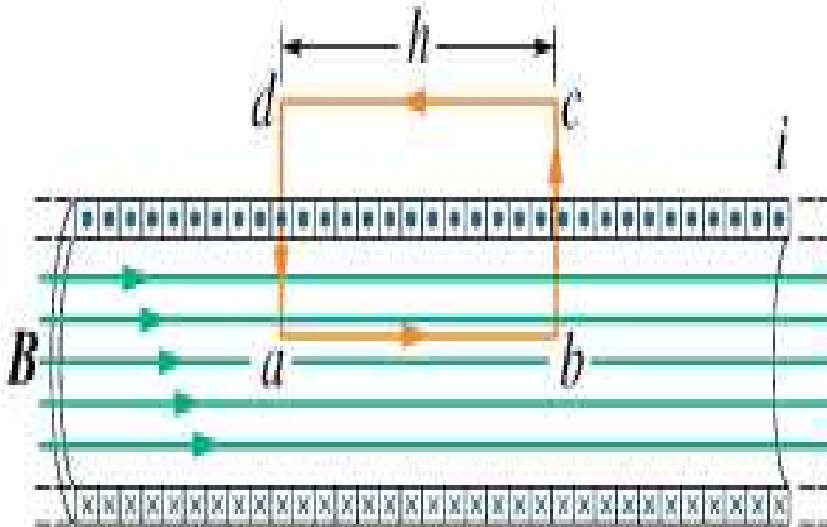
corrente concatenata è in questo esempio

$i_{conc} = \int_a^r J dS = \int_a^r cr^2(2\pi r)dr$  (J è variabile sulla superficie) quindi  $i_{conc} = 2\pi c \frac{r^4 - a^4}{2}$  dai conti quindi  $B = 2 \cdot 10^{-5} T$

### 30.4- Campo magnetico di solenoidi e toroidi

Il solenoide è costituito da un lungo filo avvolto a forma di spirale attorno ad un supporto cilindrico, e le varie spire sono strettamente addossate l'una all'altra. Assumiamo che la lunghezza del solenoide sia molto grande (o comunque molto più grande del suo diametro) e analizziamo una sezione trasversale di questo solenoide. Nel caso ideale queste spire sono così vicine tra loro da formare un continuo e come visibile in figura in questa situazione il campo magnetico tende a disporsi secondo l'asse orizzontale del solenoide stesso. Inoltre se il solenoide di lunghezza infinita e le spire sono strettamente addossate non vi sono linee di campo che possono uscire dal so-

lenoide. Pertanto la situazione è approssimabile a quella in figura.



Possiamo allora scegliere un percorso rettangolare ABCD che si adatta a questo caso:

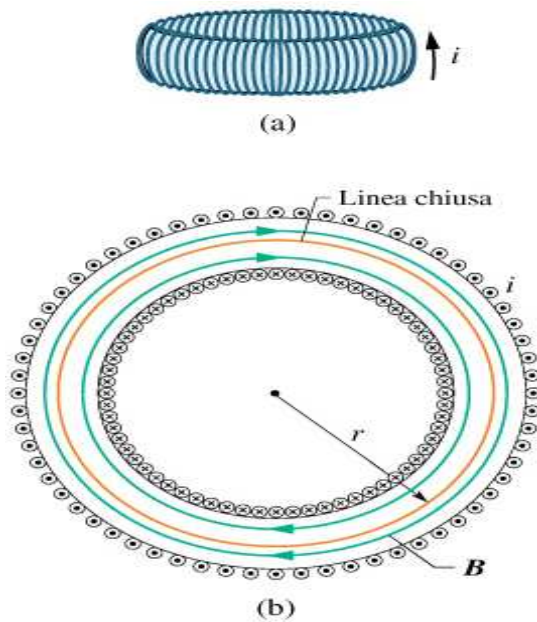
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{conc} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Di questi termini il secondo ed il quarto sono nulli in quanto il percorso ed il campo sono perpendicolari tra loro, il terzo è nullo perchè nel solenoide ideale il campo esterno è nullo per cui si ha  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} = B h = \mu_0 i_{conc}$

La corrente concatenata è la somma delle correnti delle spire intrecciate al percorso per cui indicando con  $\mathbf{n}$  il numero di spire per unità di lunghezza  $i_{conc} = n h i$  da cui  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{n i}$  e  $i$  è

la corrente che entra nel filo del solenoide.

## Toroide



Nel caso del toroide (vedi figura) le spire si avvolgono attorno ad una ciambella. La legge di Ampere ci indica allora che  $B 2\pi r = \mu_0 i N$  ( $N$  è il totale delle spire) per cui  $B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$

## 30.5- Campo magnetico di una bobina

Il campo si ricava applicando direttamente la legge di Biot-Savart in quanto nel caso della spirale percorsa da corrente non vi è una simmetria tale da risolvere il problema con Ampere. La

spira abbiamo detto che è equivalente ad un dipolo magnetico  $\mu$  e si trova che  $B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}$  per i punti sull'asse  $z$  passante per il centro della spira e ad essa ortogonale con  $\mu = \mathbf{i} \mathbf{S}$ .