

Cap 2 - Cinematica

La **meccanica** è la parte della fisica che studia il moto dei corpi e le cause (forze) si divide in:

- **Cinematica:** è la parte della meccanica che studia il moto dei corpi
- **Dinamica:** si occupa delle cause del moto di un corpo

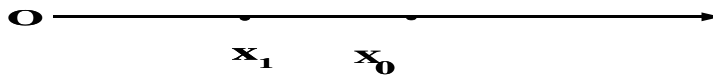
Come si studia il moto di un corpo?

- a) Bisogna localizzare il corpo che si muove avendo scelto un riferimento (lo assumeremo in genere fisso)
- b) Bisogna descrivere le variazioni della posizione nel tempo ovvero lo spostamento del corpo

Quindi per la descrizione di un moto per prima cosa si stabilisce un riferimento e quindi si determinano le coordinate del punto rispetto l'origine del sistema di riferimento.

2.2 - Il vettore spostamento

Spostamento: ha carattere vettoriale quindi caratterizzato da un valore (**modulo**), una **direzione ed un verso** il modulo è la distanza tra la posizione iniziale e quella finale di un oggetto.



Esempio: ad un certo istante il punto P in figura è nella posizione $x_0=5\text{m}$ (quindi nel verso positivo dell'asse), in un altro istante è nella posizione $x_1=3\text{m}$. Lo spostamento è $\Delta x=3\text{m}-5\text{m}=-2\text{m}$.

Quindi il modulo dello spostamento è 2m , il segno meno indica che il verso è opposto all'asse di riferimento x e la direzione è opposta all'asse x (in questo capitolo consideriamo solo i moti in una dimensione)

Altre definizioni

PUNTO MATERIALE: oggetto di dimensioni trascurabili ed avente massa

LA POSIZIONE di un punto materiale deve essere sempre riferita ad un sistema di coordinate

IL SISTEMA DI COORDINATE è destrorso (l'orientazione degli assi segue le dita della mano destra: indice asse x, medio l'asse y, il pollice l'asse z)

IL MOTO DI UN CORPO è determinato se è nota la posizione in funzione del tempo

LA TRAIETTORIA descritta è il luogo geometrico dei punti occupati successivamente dal punto materiale in movimento

GRANDEZZE FONDAMENTALI in cinematica: spazio, tempo, velocità, accelerazione

MOTI RETTILINEI

MOTI RETTILINEI sono quelli per i quali la traiettoria è una retta, il moto è in una sola dimensione quindi il punto è individuato da una sola coordinata.

Se indichiamo con x l'asse del moto, i valori delle posizioni x del punto in funzione del tempo t costituiscono una funzione $x(t)$ rappresentabile in un sistema di assi cartesiani. Il diagramma della $x(t)$ in funzione di t costituisce il **diagramma orario** del moto.

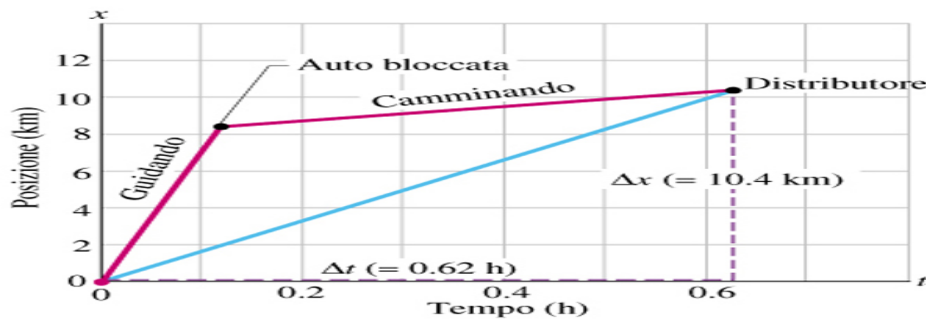


Figura 1: esempio di diagramma orario

2.3 - VELOCITÀ del PUNTO

Se al tempo t_1 il punto si trova in $x(t_1)=x_1$ e al tempo t_2 si trova in $x(t_2)=x_2$ DEFINIAMO come **VELOCITÀ MEDIA**, ovvero la rapidità

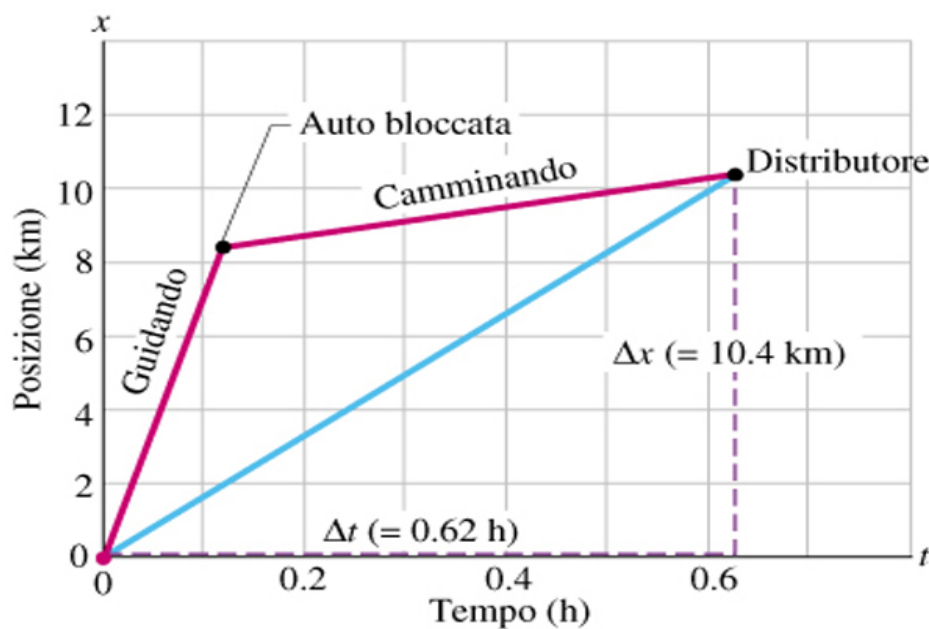
con la quale cambia la posizione come:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$$

La velocità è un vettore (velocità vettoriale) perchè ha direzione e verso, da non confondere con la velocità scalare che ha la stessa definizione ma è riferita al solo modulo del vettore velocità.

Unità di misura: $[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \mathbf{m/s}$

Esempio Problema 2.1



Alla guida di un'automobile, dopo aver percorso una strada rettilinea per 8.4 Km a 70Km/h, siete rimasti senza benzina. Avete quindi proseguito a piedi, nella stessa direzione, per 2.0 Km sino al distributore, dove siete arrivati dopo 30 min di cammino.

- Quale è stato lo spostamento?
- il tempo di percorrenza?
- la velocità vettoriale media?

Velocità istantanea

La **VELOCITÀ ISTANTANEA** si ottiene come limite per intervalli di tempo $\Delta t \rightarrow 0$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocità istantanea è la rapidità di variazione della posizione all'istante t :

geometricamente v è la pendenza della retta tangente al diagramma orario nel punto P .

La velocità può essere a sua volta ancora una funzione del tempo. Se $v = \text{costante}$ si parla di

MOTO RETTILINEO UNIFORME

Legame tra x e v : se è nota la posizione $x = x(t)$ la velocità si ottiene derivando rispetto al tempo t : **$v = dx/dt$**

viceversa nota la velocità si ha:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow$$

$$\Delta x = x - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

ESEMPIO: moto rettilineo uniforme

Moto rettilineo uniforme

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \text{costante} = \mathbf{v}_0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}_0 dt = \\ = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^{t_1} dt = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{t} - t_0) \end{array} \right.$$

Nel caso in cui $t_0=0$ la formula diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}_0 \Rightarrow \\ \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} \end{array} \right.$$

QUINDI NEL MOTO RETTILINEO UNIFORME LO SPAZIO PERCORSO x è UNA FUNZIONE LINEARE DEL TEMPO

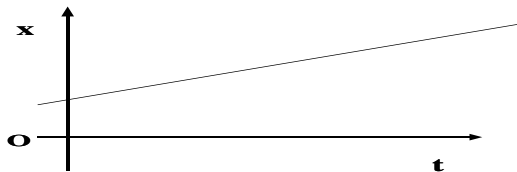


Diagramma orario del moto rettilineo uniforme

Problema 2.3

Un punto materiale si muove sull'asse x secondo la legge:

$$x = 7.8 + 9.2t - 2.1t^3$$

con t in secondi e x in metri. Qual'è la velocità al tempo t=3.5s?

La velocità è $v = \frac{dx}{dt}$ per cui $v = \frac{d}{dt}(7.8 + 9.2t - 2.1t^3) =$

$$9.2 - 3 \cdot 2.1t^2 = 9.2 - 6.3t^2$$

Per cui al tempo t=3.5s si ha v=-68m/s

Piccolo promemoria per le derivate fondamentali

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

2.5 Accelerazione

In modo analogo allo spostamento anche per la velocità possiamo definire la sua rapidità di variazione temporale che chiamiamo **accelerazione istantanea**

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Quindi l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, la quale è a sua volta la derivata rispetto al tempo della posizione (indicata con x per il moto 1-D), per cui l'accelerazione è anche la **derivata seconda** della posizione rispetto al tempo

geometricamente l'accelerazione rappresenta la concavità della curva diagramma orario.

Se $a=0$ allora la velocità v è costante ed il moto è rettilineo ed uniforme

Se $a = \text{costante} \neq 0$ il moto si dice **RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO**

Legami tra a, v, x e t : In generale se è nota la $a=a(t)$ si può ricavare per successive integrazioni

prima la $v=v(t)$ e poi la $x=x(t)$:

$$v(\mathbf{t}) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(\mathbf{t})dt \quad e$$

$$x(\mathbf{t}) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(\mathbf{t})dt$$

Caso particolare: **moto rettilineo uniformemente accelerato**: abbiamo in questo caso $a=cost \Rightarrow$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a dt = v_0 + a(t_1 - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} (v_0 + a \cdot t) dt =$$

$$= x_0 + v_0 \cdot t \Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} a t^2 \Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t^2 - t_0^2)$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo indicato t_1 semplice con t)

Scegliendo il caso (che è quello più frequente) $t_0=0$ le precedenti formule diventano:

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\begin{cases} a(t) = \text{costante} = a_0 \\ v(t) = v_0 + a \cdot t \\ x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \end{cases}$$

Unità di misura dell'accelerazione: dalla definizione abbiamo che:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

per cui abbiamo che $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \text{m/s}^2$

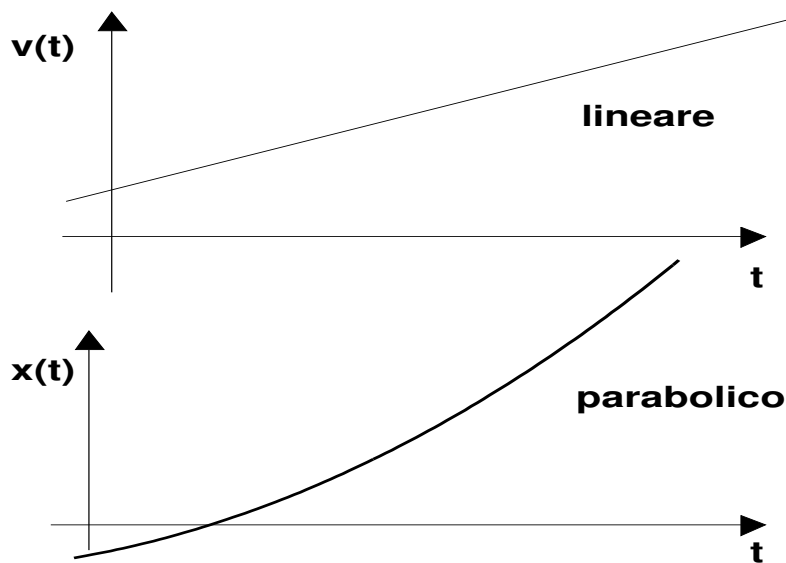
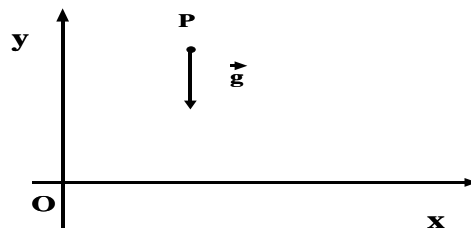


Figura 2: Grafici orari di velocità e posizione nel moto acc.

2.8-Esempi di moto uniformemente accelerato: Caduta libera

Un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della Terra si muove verso il basso con accelerazione costante che in modulo è $g=9.8 \text{ m/s}^2$ ed è detta **ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ**. Tale accelerazione è la stessa per tutti gli oggetti e praticamente costante sulla superficie della Terra. Il moto di caduta risultante è **rettilineo uniformemente accelerato**.



Scegliendo un riferimento come in figura l'accelerazione è $a=-g$ o meglio vettorialmente $\vec{a} = -g\hat{j}$ avendo indicato con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ i versori degli assi.

Pertanto se la velocità iniziale è $v_0=0$ (perchè stiamo descrivendo il caso in cui l'oggetto è fermo inizialmente) allora $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ e indicando $y_0=h$ la posizione a $t=0$, l'equazione diventa $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ che fornisce la posizione y a qualunque istante di tempo $t>0$.

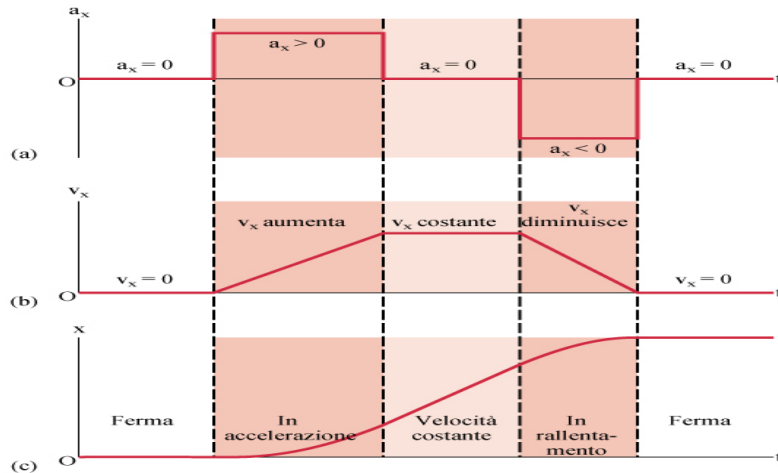
Calcolo del tempo necessario a raggiungere il suolo:

il suolo è a $y=0 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gt^2$ da cui $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

La velocità segue invece la legge $\mathbf{v} = -\mathbf{g}t$ ($v_0=0$)

per cui all'impatto si ha $\mathbf{v}_{\text{FIN}} = -\mathbf{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$

Come interpretare rapidamente il diagramma orario



Guardando la figura in basso abbiamo un diagramma orario relativa al moto di una automobile. L'auto è inizialmente ferma poi accelera raggiungendo una certa velocità. Procede a velocità costante per un pò poi decelera ed infine si ferma. Infatti essendo la velocità la derivata prima della posizione **rappresenta anche la pendenza** del diagramma orario. Nel grafico inferiore vediamo infatti che la pendenza è nulla nella prima regione (partendo da $t=0$), positiva dalla 2 alla 4 e nulla di nuovo nell'ultima. Il grafico della velocità che ricaveremmo dal diagramma orario è nella figura b) intermedia. Sempre analizzan-

do la c) possiamo anche dedurre informazioni sull'accelerazione: l'accelerazione è la derivata seconda (rispetto al tempo) e quindi per il diagramma orario rappresenta il tipo di concavità della curva: nella regione 1 abbiamo una retta quindi $a=0$, nella 2 una curva con concavità verso l'alto quindi $a > 0$ nella 3 di nuovo una retta $a=0$, nella **quarta** regione la concavità è verso il **basso** quindi $a < 0$ ed infine l'ultima regione di nuovo $a=0$.

Cap 2 - 2.26E

Un aereo a reazione, per decollare, deve raggiungere la velocità di 360 Km/h. Partendo da fermo qual'è la minima accelerazione necessaria a decollare se la pista è lunga 1.8 km?

2.29E

I freni della vostra auto possono esercitare una decelerazione di 5.2 m/s^2 . Se state viaggiando a 137 Km/h e notate la polizia stradale, qual'è il tempo minimo entro il quale potete portare la velocità entro il limite dei 90 Km/h ?